Appunti di Matematica
Docente: A. Pisani

Calcolo dei limiti

1) Definizione di limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Si dice che la funzione $y = f(x)$ tende al limite l se la variabile x tende a x_0 e si scrive : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ intendendo che, se $f(x)$ (o y) approssima il valore l, allora la x approssima il valore x_0. Più esattamente avremo che $f(x) \in I(l, \varepsilon)$ per tutte le x, tali che $x \in I(x_0, \delta)$. escluso x_0 e all'interno del dominio di $f(x)$. In simboli: $\forall I(l;\varepsilon) \exists I(x_0;\delta) : x \in I(x_0;\delta) - \{x_0\} \cap D_f \Rightarrow f(x) \in I(l;\varepsilon)$ oppure, equivalentemente: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

2) Operazioni con i limiti

Supponiamo di avere due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, in modo tale che valgano i seguenti limiti: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = h$, allora valgono le seguenti proprietà utili per il calcolo dei limiti:

a) SOMMA: $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l + h$

b) DIFFERENZA: $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = l - h$

c) PRODOTTO: $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot h$

d) RAPPORTO: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{h}$, ma solo se il denominatore non è nullo: $h \neq 0$.

Se invece $h = 0$, ma $l \neq 0$, allora il limite del rapporto tra $f(x)$ e $g(x)$ è infinito: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Infine, se sia $h = 0$ che $l = 0$ allora il limite non è calcolabile semplicemente sostituendo a x il valore di x_0: è una *forma indeterminata.*

Inoltre, sia $k \in R$ un numero reale, allora:

e) POTENZA: $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^k = l^k$

f) RADICE: $\lim_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{l}$

NOTA: le stesse operazioni valgono se consideriamo i limiti per $x \to \infty$, anziché per $x \to x_0$.

ESEMPI:

I) $\lim_{x \to 1} \frac{2x+1}{6x-5} = 3$ infatti, dato che il limite è per $x \to x_0$, se sostituisco il valore di $x_0 = 1$ al numeratore ottengo: $2 \cdot 1 + 1 = 3$, mentre al denominatore: $6 \cdot 1 - 5 = 1$, utilizzando la regola del rapporto tra i limiti, concludo che il limite vale il rapporto tra 3 e 1, quindi il suo valore è 3.

II) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{5-x}{x}} = 2$ infatti, dato che il limite è per $x \to x_0$, se sostituisco il valore di $x_0 = 1$, al numeratore sotto radice ottengo 4, al denominatore sotto radice ottengo 1 e quindi il limite vale $\sqrt{\frac{4}{1}} = \sqrt{4} = 2$.

III) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + x + 1}{x - 4} = \infty$ infatti, dato che il limite è per $x \to x_0$, se sostituisco il valore di $x_0 = 4$ al numeratore ottengo un valore pari a 21, mentre al denominatore ottengo zero. In base quanto visto circa il limite del rapporto tra funzioni il valore del limite è, in questo caso, infinito.

3) Calcolo di limiti per $x \to \infty$ di funzioni razionali.

Valgono i seguenti limiti: $\lim_{x \to \infty}(ax + b) = \infty$, per qualunque $a \neq 0$. In generale per una funzione razionale abbiamo: $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{cx^m + dx^{m-1} + \ldots}$ ove il numeratore è un polinomio di grado n ed il denominatore è un polinomio di grado m. Allora valgono i seguenti risultati:

A) se il grado del numeratore n è maggiore del grado del denominatore m: n>m allora il limite è infinito. Il segno dell'infinito dipende dalla differenza tra n-m e dai segni del coefficiente a e del coefficiente c delle x di grado più alto.
$n > m \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{cx^m + dx^{m-1} + \ldots} = \infty$

B) Se il grado del numeratore n e del denominatore m sono uguali: n=m allora il limite è dato dal rapporto tra i coefficienti delle x di grado più alto: a/c.
$n = m \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{cx^m + dx^{m-1} + \ldots} = \frac{a}{c}$

C) se il grado del numeratore è minore del grado del denominatore: n<m allora il limite è zero: $n < m \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \ldots}{cx^m + dx^{m-1} + \ldots} = 0$

ESEMPI:

I) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{6x+5}=\infty$ dato che il limite è per $x\to\infty$ e il grado del numeratore è 2, mentre il denominatore ha grado 1. Quindi siamo nel limite tipo A): n=2 e m=1 per cui n>m ed il limite è infinito.

II) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x^2+x-1}{3x^3+x-6}=\frac{6}{3}=2$ dato che $x\to\infty$ e, inoltre, il numeratore ed il denominatore hanno entrambi lo stesso grado: n=m=3 quindi il limite vale il rapporto tra il coefficiente della x di grado 3 al numeratore che è 6, fratto il coefficiente della x di grado 3 al denominatore che è 3.

III) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+2}{x^3+1}=0$ dato che il limite è per $x\to\infty$, inoltre il grado del numeratore è n=2, mentre il denominatore ha grado m=3 e quindi n<m per cui questo limite è del tipo C) e vale zero.

4) Forme indeterminate del tipo 0/0.

Consideriamo il caso ad esempio: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$. In questo caso il limite è del tipo per $x\to x_0$, con $x_0=1$, ma se sostituisco il valore di 1 a x ottengo zero sia al numeratore che al denominatore e quindi non posso applicare nessuno dei criteri precedenti. Ho una forma indeterminata. Posso risolvere la forma indeterminata e calcolare il valore del limite scomponendo in fattori il numeratore ed in denominatore. Nell'esempio considerato il numeratore si scompone in $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ e quindi: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=1-2=-1$.

5) Forme indeterminate del tipo ∞-∞.

Consideriamo il seguente esempio: $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x})$ in questo caso il limite è la differenza tra due funzioni che all'infinito divergono entrambe, quindi non è lecito applicare il criterio della differenza tra limiti, che è valido solo per funzioni convergenti. La tecnica che si usa in questo caso è la razionalizzazione. La funzione di cui devo calcolare il limite è la differenza tra radici e quindi può essere razionalizzata moltiplicando il numeratore e denominatore (che in questo caso è 1) per la somma delle due radici stesse:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x})\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1-x}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}=\infty$$

L'ultimo passaggio è motivato dal fatto che il numeratore è ora un polinomio di primo grado, mentre il denominatore è un'espressione in radice quadrata di x e quindi

di grado ½. Per questo motivo il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore e quindi il limite è infinito.