Il differenziale ed i teoremi sulle funzioni derivabili

Appunti delle lezioni di

Analisi

A. Pisani

A.S. 2002-03

Liceo Classico *Dante Alighieri* (GO)

Nota bene

Questi appunti sono da intendere come guida allo studio e come riassunto di quanto illustrato durante le lezioni in classe. In nessun caso sono sostitutivi del libro di testo che rimane uno strumento indispensabile allo studio.

A. Pisani

P.S.: Molte delle figure sono state realizzate personalmente da me con l'aiuto del software MathCad 2001i, altre figure provangono da www.matematicamente.it/index.html, www.dm.unife.it/MatFarmacia/appunti/matud02/matud02.html

Indice

- Il differenziale: definizione, proprietà ed applicazioni in fisica, interpretazione geometrica
- I teoremi sulle funzioni derivabili: t. di continuità, t. di Fermat, t. di Rolle e t. di Lagrange.
- Applicazioni: funzioni crescenti e decrescenti, ricerca dei massimi, minimi e flessi.

IL DIFFERENZIALE

Nelle diverse applicazioni dell'analisi matematica alla fisica ed alle scienze in generale, si presenta spesso la necessità di studiare il legame che esiste non solo tra grandezze diverse, ma anche tra le loro variazioni.

Consideriamo ad esempio una particella in moto con velocità $v(t)$ in generale variabile nel tempo. Sia $x(t)$ la posizione occupata dalla particella al tempo t. Se la velocità fosse costante, allora lo spostamento della particella in moto nel periodo di tempo Δt sarebbe dato da: $\Delta x = v \cdot \Delta t$ In generale, la velocità non è costante e questa relazione tra spostamento e intervallo di tempo non è valida.

Tuttavia, se Δt è sufficientemente piccolo, al limite infinitesimo, allora si può assumere che la velocità non cambi di molto durante

questo periodo. In generale una **<u>variazione infinitesima</u>** si indica non con il simbolo Δt ma con dt .

Analogamente è infinitesimo lo spazio percorso durante il periodo di tempo dt ed è dato da: $dx = v(t) \cdot dt$

La grandezza così ottenuta: dx prende il nome di **<u>differenziale</u>** della variabile posizione x che è legato al differenziale della variabile tempo dt Notiamo che: $v(t) = x'(t) = D[x(t)]$

In generale quindi, se due variabili x e y sono legate da una funzione $y = f(x)$ derivabile, allora il prodotto tra la variazione infinitesima della x per la derivata $f'(x)$ prende il nome di **<u>DIFFERENZIALE</u>** della variabile (dipendente) y , in sobmoli:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Da quanto esposto segue che un altro modo (molto utilizzato) per indicare la derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Oppure, equivalentemente:

$$D[f(x)] = f'(x) = \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} f(x)$$

Ove viene esplicitamente indicato che si deriva rispetto ad x

Di conseguenza l'operatore di derivazione si può anche indicare:

$$D = \frac{d}{dx}$$

IL DIFFERENZIALE: proprietà

Dato che il differenziale è proporzionale alla derivata, le proprietà generali del differenziale discendono direttamente da quelle delle derivate (vedi derivate elementari e regole di derivazione).

Ad esempio, se $y = f(x) = 3x^2 - 2x$

allora: $$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 2x) = 6x - 2$$

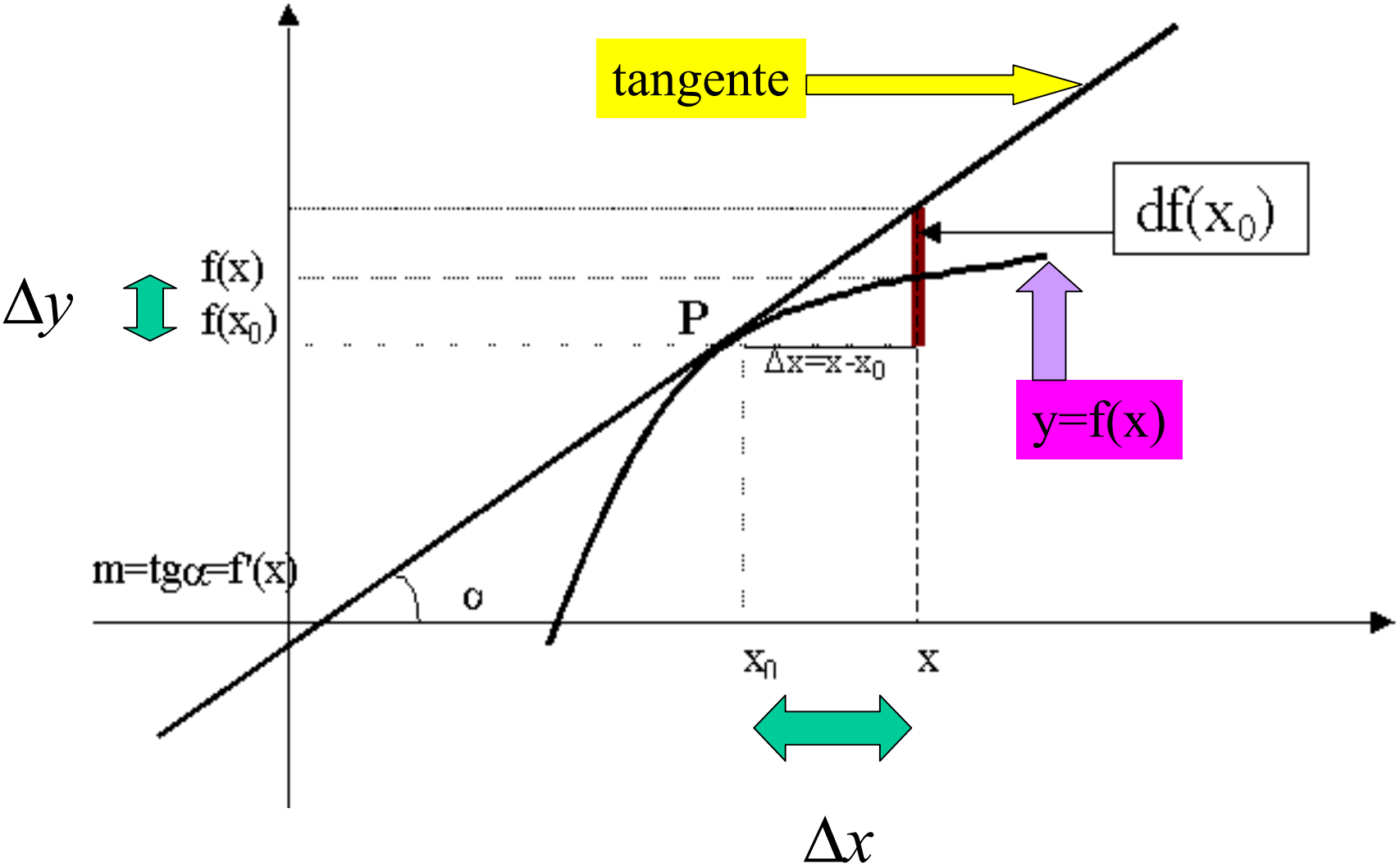
e quindi:

$$dy = f'(x)dx = (6x - 2)dx$$

IL DIFFERENZIALE: proprietà

Così come la derivata, anche il **differenziale è una proprietà puntuale** della funzione, cioè è esso stesso una funzione del punto nel quale viene calcolato.

Interpretazione geometrica



Applicazioni del differenziale

Consideriamo un esempio di come il concetto di differenziale viene utilizzato in fisica.

Sia F una forza, in generale non costante, e supponiamo che un corpo a cui è applicata la forza si sposti di un tratto molto piccolo dx, allora il lavoro fatto dalla forza sarà: $F \cdot dx$

Anche il lavoro sarà molto piccolo e quindi lo indichiamo con dL

Se la forza è conservativa, allora possiamo dire che il lavoro svolto è pari alla diminuzione di energia potenziale: $dL = -dU$

Quindi: $F \cdot dx = -dU$

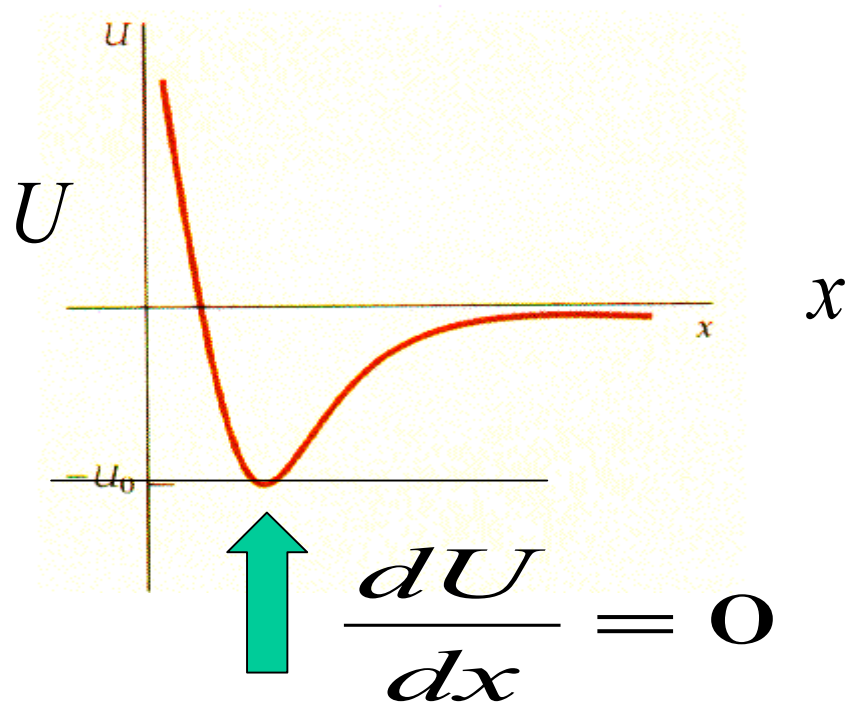
Da ciò possiamo concludere che: $$F = -\frac{dU}{dx}$$

la forza è l'opposto della derivata dell'energia potenziale U rispetto alla posizione x .

Quindi, in generale, se abbiamo il grafico dell'andamento della energia potenziale con la posizione: $U = U(x)$
allora **i punti di equilibrio dinamico, ove cioè la forza è nulla, sono i punti del grafico aventi tangente orizzontale**.

$$F = -\frac{dU}{dx} = 0$$

Energia potenziale della interazione interatomica



Energia potenziale gravitazionale

Due corpi di masse M e m a distanza r si attraggono con una forza F alla quale è associata un'energia potenziale U data da:

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

Possiamo calcolare la forza F come: $F = -\frac{dU}{dr} =$

$$= -\frac{d}{dr}\left(-G\frac{Mm}{r}\right) = \left(GMm\frac{d}{dr}r^{-1}\right) =$$

$$= GMm(-r^{-2}) = -G\frac{Mm}{r^2}$$

Teorema 1: continuità delle funzioni derivabili

Dimostriamo ora il seguente teorema:

Consideriamo la funzione $y = f(x)$ *e supponiamo che sia derivabile in* x_0 *allora la funzione è continua in* x_0

Dalla seguente identità (valida se $x \neq x_0$):

$$x \to x_0 \qquad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x_0) = f(x_0) + 0 \times f'(x_0)$$

Quindi, abbiamo mostrato che, dato che:

$$\lim_{x \to x_0} \left\{ f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right\} = f(x_0)$$

Allora vale:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

E quindi la funzione è continua. In simboli:

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nota bene!

<u>Non vale il teorema inverso</u>. In generale ***NON*** è vero che se una funzione è continua è anche derivabile!

Ad esempio la funzione valore assoluto:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

è continua nel punto $x = 0$ ma non è derivabile per questo valore della x. Infatti, mentre:

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Ed inoltre:

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

Per cui **la funzione è continua**, ma la sua derivata ...

…non lo è. Infatti, il limite destro della derivata in 0 è:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} D[x] = 1$$

Mentre il limite sinistro della derivata in 0 è:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} D[-x] = -1$$

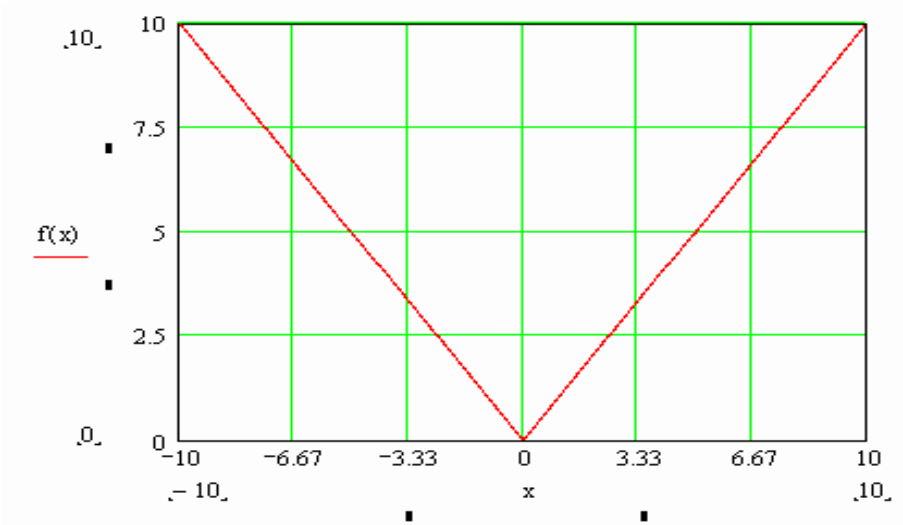
Quindi la derivata della funzione valore assoluto non è definita in 0: ha una discontinuità a salto.

Nota che la derivata della funzione valore assoluto è la funzione segno.

Vediamo una interpretazione geometrica di questo risultato.

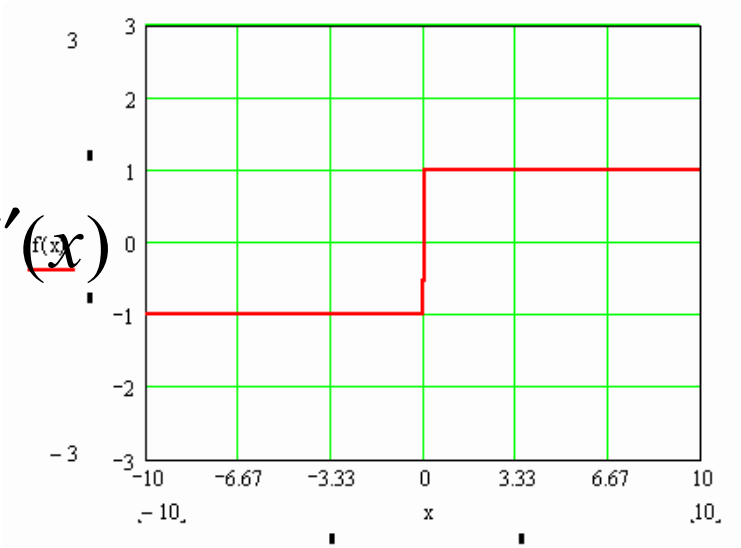
Ecco il grafico della funzione valore assoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$



N.B.: la funzione è continua in 0
ma a destra di 0 il coefficiente angolare è +1, mentre a sinistra di 0 il coefficiente angolare è -1.

$f'(x)$



Osserva il grafico della derivata: dato che la derivata è il coefficiente angolare della tangente: in 0 passa bruscamente da -1 a +1: la derivata è discontinua!

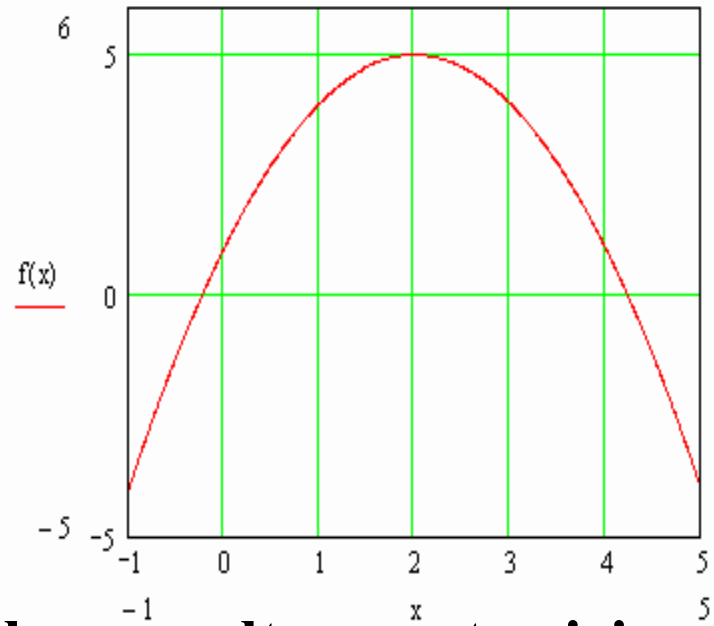
Animazione

Massimo e minimo di una funzione

Una funzione come quella indicata nel grafico assume in $x_0 = 2$ il suoi valore più grande: $f(x_0 = 2) = 5$

Si dice che la funzione ha un punto di **<u>massimo relativo</u>** in $x = x_0$ se esiste almeno un intorno aperto $I(x_0)$ di x_0 tale che per tutti gli x di tale introno valga la seguente disequazione:

$$f(x) \leq f(x_0)$$
$$\forall x \in I(x_0) \cap D_f$$



In x_0 la funzione è maggiore che in qualunque altro punto vicino.

Allo stesso modo si definisce il **<u>minimo relativo</u>**:

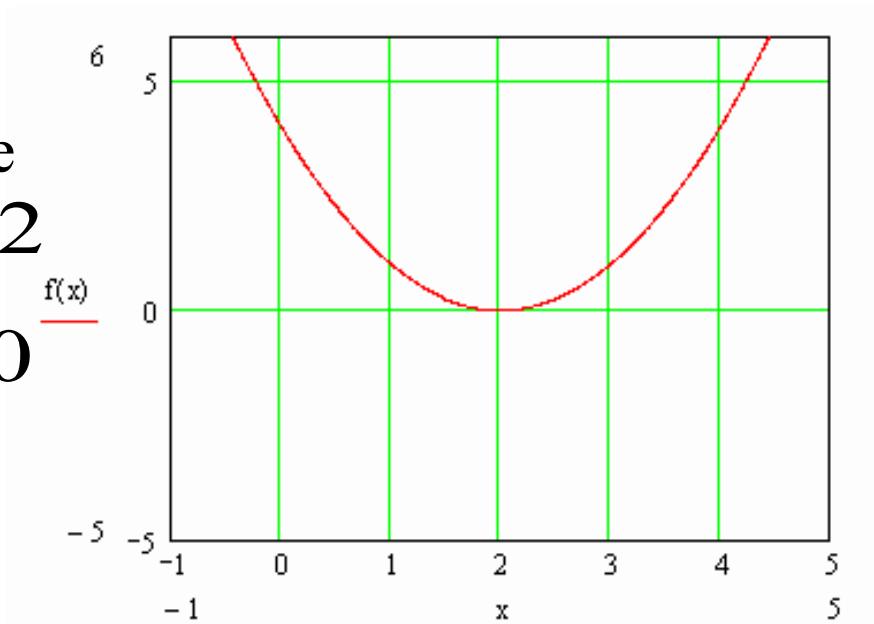
Si dice che la funzione ha un punto di **<u>minimo relativo</u>** in $x = x_0$ se esiste almeno un intorno aperto di $I(x_0)$ tale che per tutti gli x di tale introno valga la seguente disequazione:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I(x_0) \cap D_f$$

In x_0 la funzione è minore che in qualunque altro punto vicino.

Nell'esempio qui indicato nel grafico, abbiamo che la funzione ha un minimo nel punto: $x_0 = 2$ e vale:

$$f(x_0 = 2) = 0$$



Massimo assoluto

Un massimo relativo è anche assoluto se la disequazione:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Vale non solo in un intorno di x_0, ma in tutto il dominio della funzione:

$$\forall x \in D_f$$

Minimo assoluto

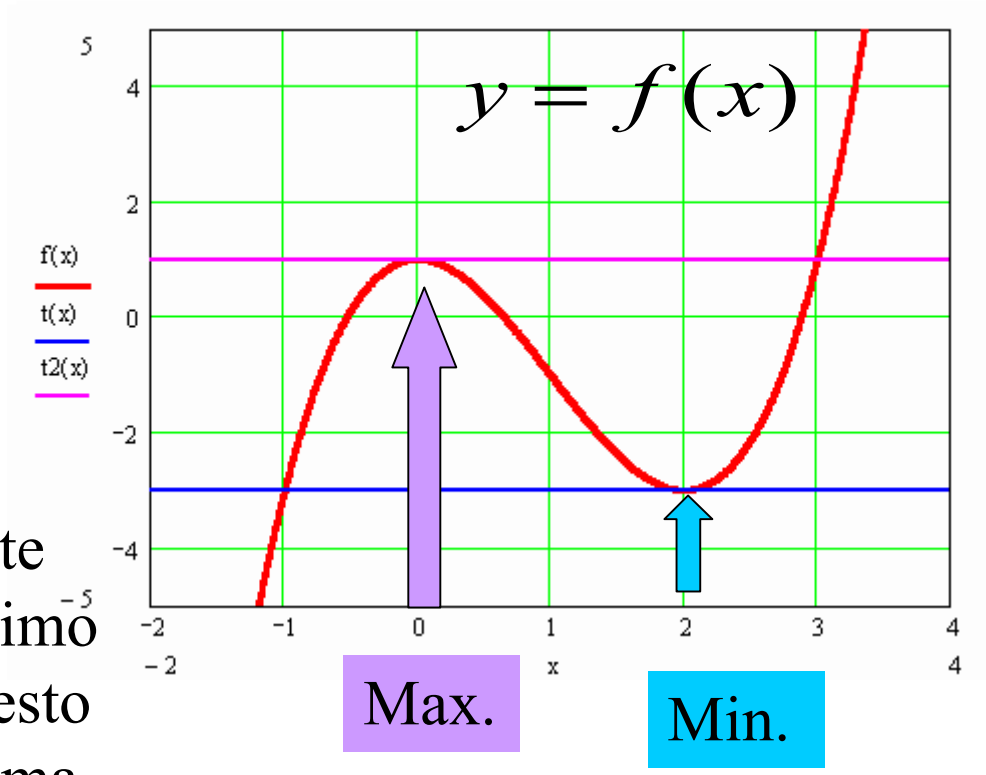
Lo stesso vale per il minimo: un minimo relativo è assoluto, se la disequazione che lo caratterizza è valida in tutto il dominio.

Esempio: Il **vertice di una parabola** è un punto di massimo assoluto se la parabola ha concavità negativa (verso il basso).

Nota

Osservando il grafico qui riportato, si può notare che la funzione ha un massimo relativo per $x = 0$ e un minimo relativo per $x = 2$

In entrambi i casi la tangente al grafico nei punti di massimo e minimo è orizzontale, questo significa che la derivata prima nei due punti è nulla.



$$f'(x_0) = 0$$

Questa è una proprietà generale dei massimi e minimi, Teorema

Teorema di Fermat

Sia $y = f(x)$ una **<u>funzione continua</u>** definita **<u>sull'intervallo chiuso e limitato</u>** $I = [a,b] = \{x \in \Re : a \le x \le b\}$

<u>se</u>

1) x_0 interno ad $I = [a,b]$, cioè: $a < x_0 < b$

è un punto di **<u>massimo o minimo relativo</u>** per la funzione, e inoltre

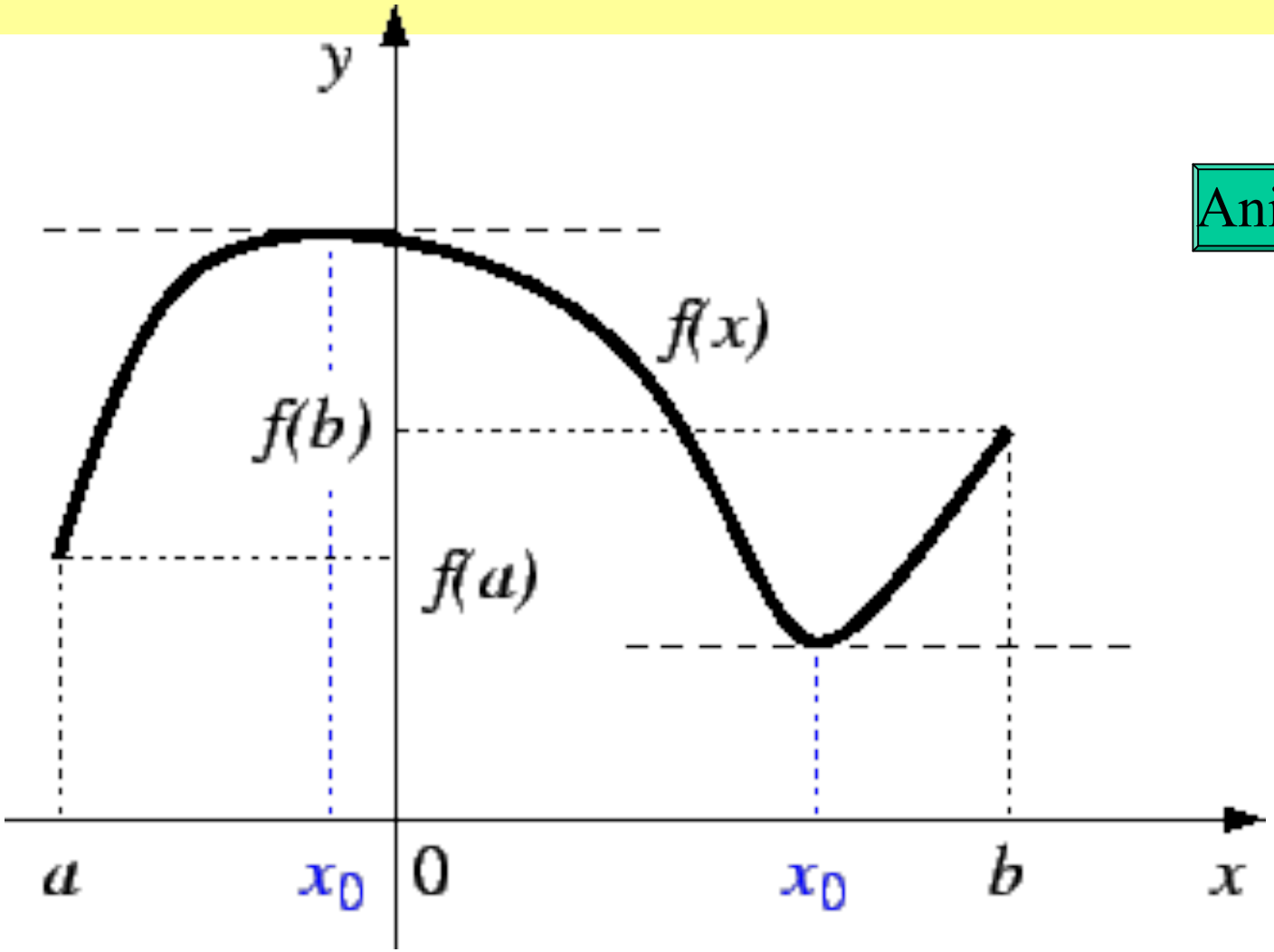
2) la **<u>funzione è derivabile</u>** in x_0 , cioè esiste $f'(x)$

<u>allora</u>

la derivata prima della funzione in x_0 è nulla:

$$f'(x_0) = 0$$

Graficamente...



Animazione

Dimostrazione del teorema

Ci limitiamo al caso in cui nel punto x_0 sia presente un minimo. Se in x_0 è presente un massimo, la dimostrazione è del tutto analoga.

In base alla definizione di minimo relativo, in un intorno sinistro di x_0 vale: $x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$
e quindi:

$$x < x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Per cui passando al limite sinistro di $\Delta f(x) / \Delta x$ in x_0 avremo:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Questo a causa del teorema sulla permanenza del segno nei limiti.

Dimostrazione del teorema

In un intorno destro di x_0 avremo analogamente:

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

E quindi:

$$x > x_0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Per cui calcolando il limite destro di $\Delta f(x) / \Delta x$ in x_0 otterremo:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Sempre per il teorema della permanenza del segno.

Dimostrazione del teorema

Quindi riassumendo:

il **limite sinistro** è minore o uguale a zero:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Il **limite destro** è maggiore o uguale a zero:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

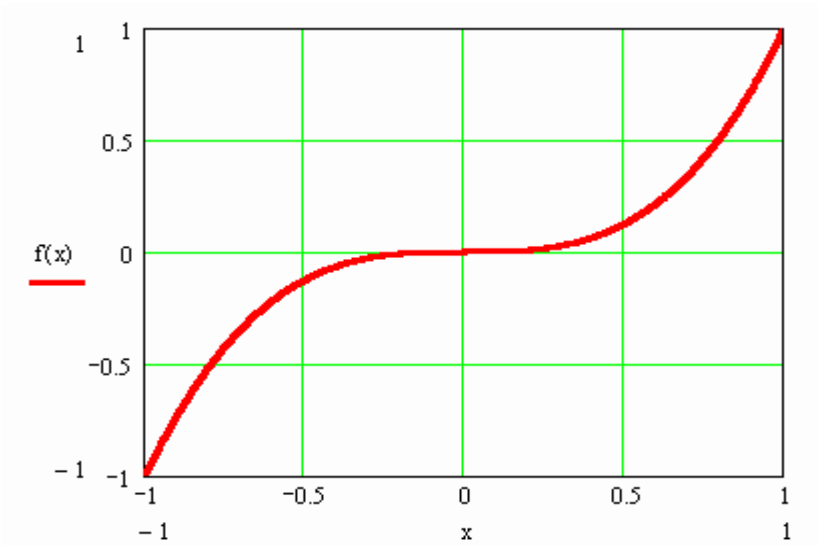
Ma dato che la funzione è derivabile in x_0 allora il limite destro e sinistro devono essere uguali e l'unica possibilità è quindi che il valore del limite sia zero per cui, dato che il limite è la derivata, avremo:

$$f'(x_0) = 0$$

Nota bene!

Non vale il teorema inverso! Cioè, non è vero, in generale che se la derivata prima di una funzione è nulla in un dato punto, allora quel punto è di massimo o minimo. Infatti se consideriamo la funzione $f(x) = x^3$ abbiamo che:

$$f'(x) = 3x^2$$



E quindi la derivata si annulla nel punto $x_0 = 0$

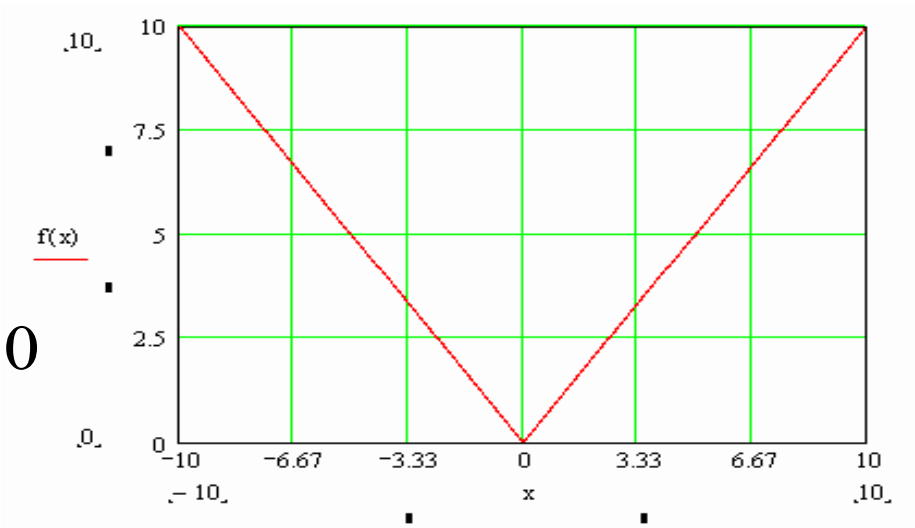
$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$$

Tuttavia $x_0 = 0$ non è né massimo né minimo!

Nota bene!

La condizione che la funzione (nel T. di Fermat) sia derivabile è essenziale. Infatti se consideriamo la funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ nell'intervallo $I = [-10,10]$ vediamo che la funzione ha un minimo assoluto in $x_0 = 0$ ma non è derivabile in questo punto!

Infatti abbiamo già visto che $f(x) = |x|$ ha derivata destra pari a +1, mentre la derivata sinistra è -1 in $x_0 = 0$



Teorema di Rolle

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ che sia:

1) **<u>continua</u>** nell'intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$

2) **<u>derivabile</u>** nell'intervallo aperto: (a, b)

3) che assuma lo stesso valore agli estremi dell'intervallo

$$f(a) = f(b)$$

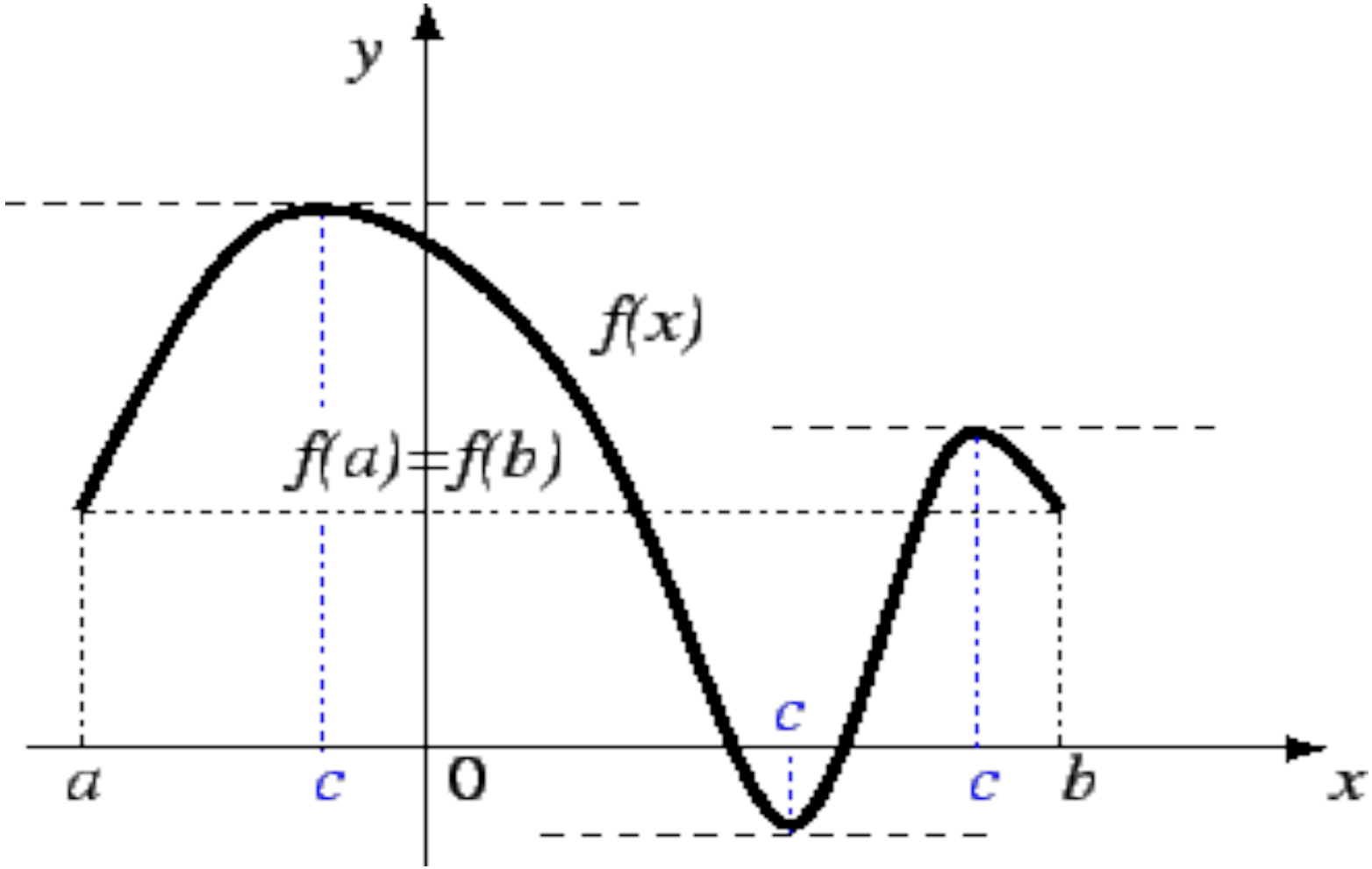
Allora:

esiste almeno un punto c compreso tra a e b

dove la derivata della funzione è nulla:

$$\exists c : a < c < b \Rightarrow f'(c) = 0$$

Graficamente...



dimostrazione

Dato che la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, allora, per il teorema di Bolzano-Weierstass, la funzione è limitata ed ha un massimo ed un minimo in questo intervallo. Siamo M il massimo ed m il minimo, ovvero

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x : a \leq x \leq b$$

Nel caso che sia m=M, la funzione è costante e quindi $f'(x) = 0$ per ogni x.

Se M>m, allora dato che $f(a) = f(b)$ né a ne b sono i punti di massimo e minimo, quindi il massimo, ad esempio, cadrà in un punto x=c compreso tra a e b: a<x<b. A questo punto, per il teorema di Fermat, se per x=c la funzione ha un massimo, allora $f'(c) = 0$

Teorema di Lagrange (del valor medio)

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ che sia:

1) **<u>continua</u>** nell'intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$

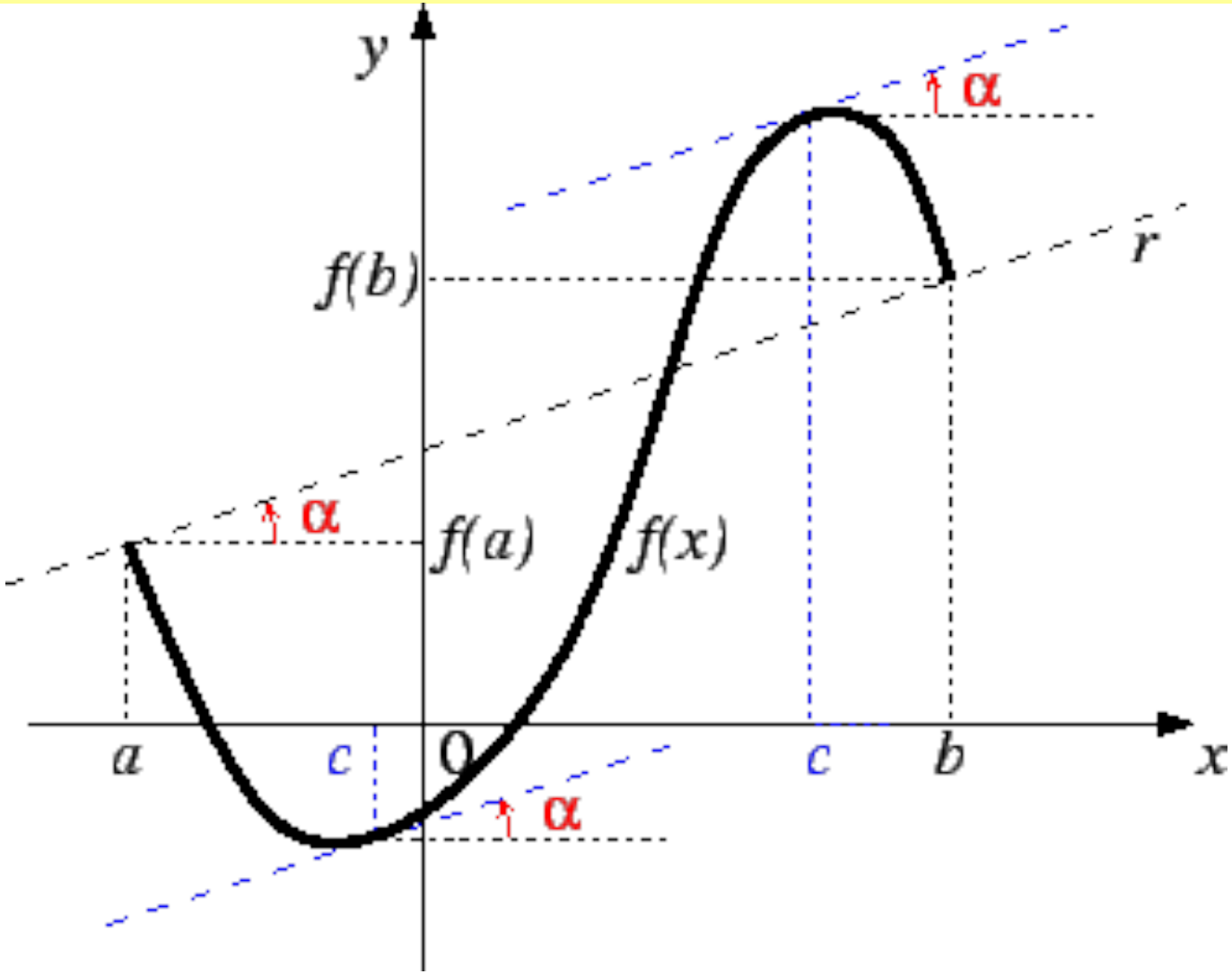
2) **<u>derivabile</u>** nell'intervallo aperto (a, b)

Allora

esiste almeno un punto c compreso tra a e b dove vale le seguente relazione:

$$\exists c : a < c < b \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Graficamente...



dimostrazione

Il teorema di Lagrange è una generalizzazione del teorema di Rolle. Questo teorema infatti afferma che, se la funzione è continua e derivabile (in modo opportuno) in un certo intervallo, allora in almeno un punto interno a tale intervallo la funzione ha una tangente parallela alla retta che attraversa i punti del grafico della funzione agli estremi dell'intervallo.

Per dimostrare il teorema è sufficiente applicare il teorema di Rolle alla funzione:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Infatti g(x) verifica le ipotesi del T. di Rolle e vale g(a)=g(b).

dimostrazione

Quindi esiste almeno un punto c, compreso tra a e b, dove vale:

$$g'(c) = 0$$

Ma, dato che:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

allora:

$$g'(c) = 0 \quad g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

e quindi:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Conseguenze

Dal teorema di Lagrange discende un importante criterio di monotonia delle funzioni.

Vediamo, però, prima cosa si intende per funzione crescente e decrescente.

Si dice che la funzione $y = f(x)$ continua in un intervallo $I = [a, b]$ è **<u>crescente</u>** in questo intervallo se:

$$x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0)$$

Oppure, analogamente:

$$x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \quad \forall x, x_0 \in [a, b]$$

Quindi, equivalentemente: $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

In altre parole: al crescere della x, cresce anche la y e viceversa.

Una funzione si dice, invece, **<u>decrescente</u>** in un intervallo se vale:

$$x<x_0 \Leftrightarrow f(x)>f(x_0)$$

Oppure:

$$x>x_0 \Leftrightarrow f(x)<f(x_0)$$

E quindi: $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0 \quad \forall x, x_0 \in [a,b]$$

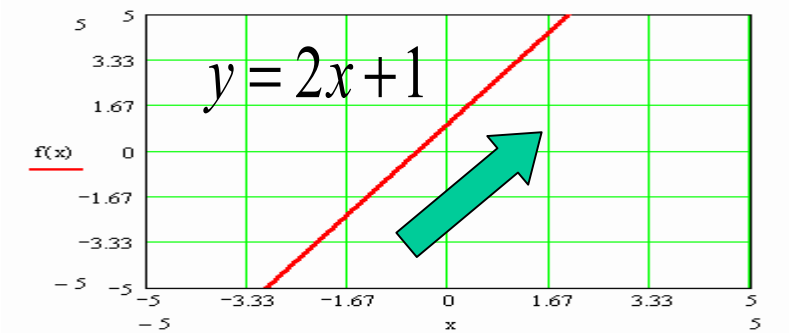
Cioè, al crescere di x, y decresce e viceversa.

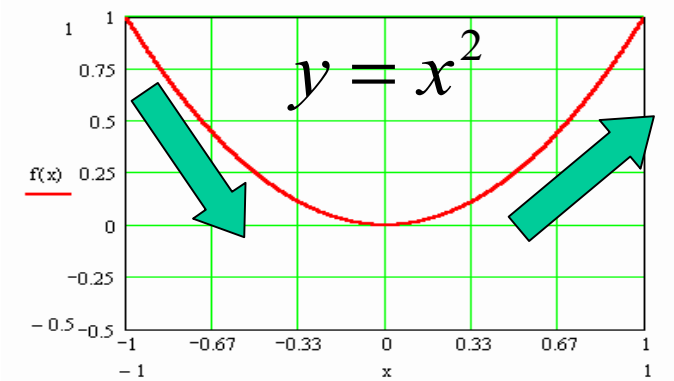
Funzioni monotòne

Una funzione che sia crescente in tutto un dato intervallo si dice **monotona** in tale intervallo.

Viceversa, non sono monotone quelle funzioni che sono crescenti in una parte dell'intervallo e decrescenti nella restante parte dell'intervallo.

Ad esempio una retta con coefficiente angolare positivo è monotona crescente in tutto il suo dominio, mentre una parabola come $y = x^2$ nell'intervallo (-1,1) è decrescente per x<0 e crescente per x>0





Criterio di monotonìa

Dal teorema di Lagrange, segue il seguente criterio:

Consideriamo la funzione $y = f(x)$ supponiamo che sia derivabile nell'intervallo aperto (a,b) allora la funzione è crescente se e solo se la sua derivata prima è positiva o nulla, in simboli:

se $\exists f'(x) \qquad \forall x \in (a,b)$

allora y=f(x) è **crescente** $\Leftrightarrow \qquad f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in (a,b)$

Viceversa: y=f(x) è **decrescente** $\Leftrightarrow \qquad f'(x) \leq 0$

$\forall x \in (a,b)$

dimostrazione

Dimostriamo che **se la derivata prima è positiva allora la funzione è crescente.**

Consideriamo due valori dell'ascissa $x, x_0 \in (a,b)$, se è vero che la funzione è derivabile nell'intervallo (a,b) allora lo è anche nell'intervallo (x, x_0) che è tutto contenuto in (a,b)

Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo (x, x_0) abbiamo che esiste almeno un valore $c \in (x, x_0)$ per il quale vale:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Inoltre, dato che la funzione ha derivata positiva in tutti i punti dell'intervallo, avremo:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Quindi la **<u>funzione è crescente</u>**

dimostrazione

Dimostriamo che **<u>se la funzione è crescente la derivata prima non è negativa.</u>**

Ragioniamo per assurdo. Se la funzione è crescente e ci fosse un punto diciamo $x_0 \in (a,b)$, ove la derivata fosse negativa, $f'(x_0) < 0$ allora avremmo, per il teorema della permanenza del segno nei limiti, che:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Quindi in almeno un intorno del punto $x_0 \in (a,b)$ avremmo:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$$

Questo implicherebbe che la funzione non è crescente, quindi sarebbe negata l'ipotesi.

Nota

In base al precedente criterio, possiamo dire che:

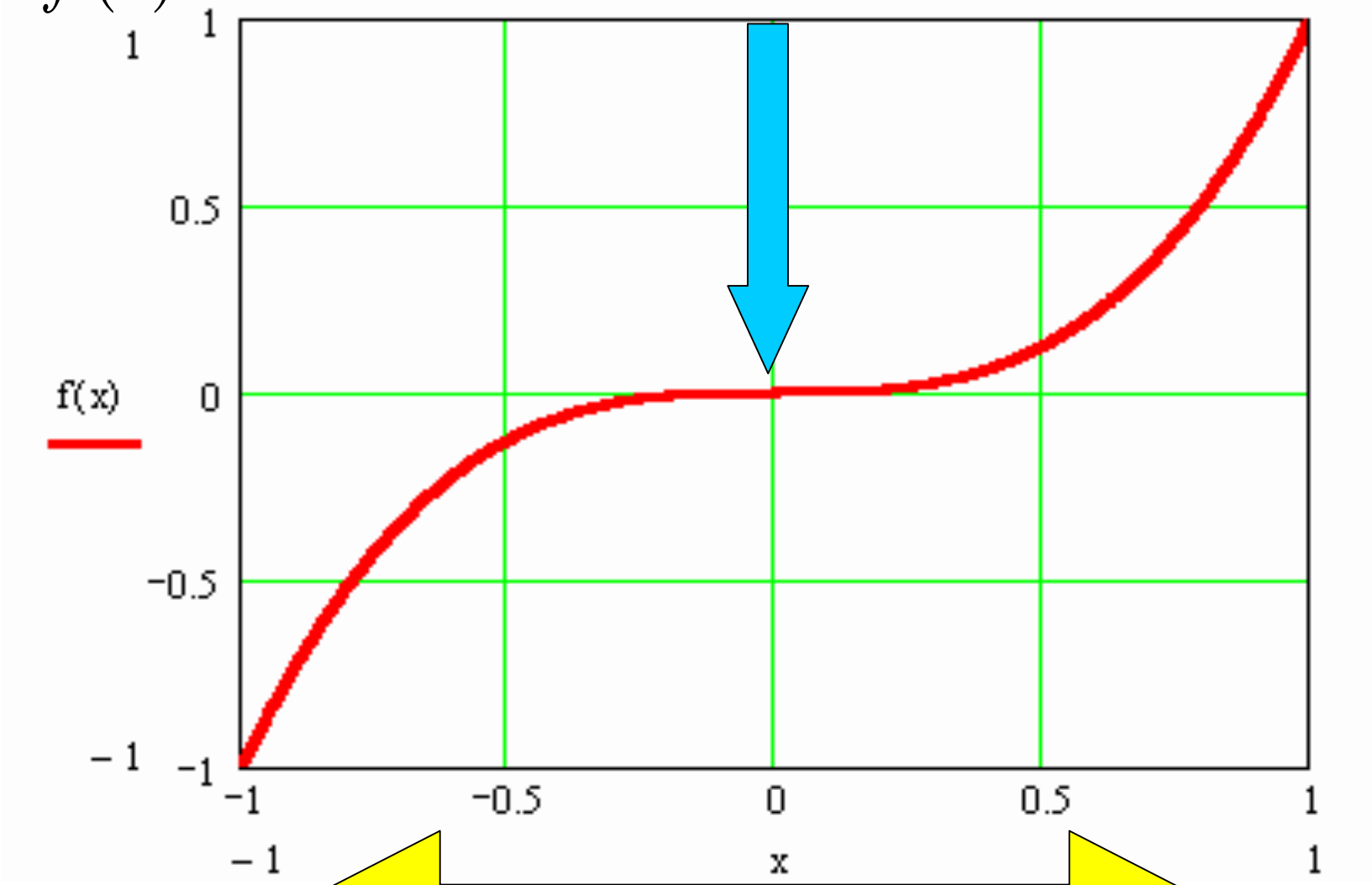
SE $f'(x) > 0$ **ALLORA** $y = f(x)$ **E' CRESCENTE**

Ma

$y = f(x)$ **Può essere crescente in I=(a,b)** **anche se** $f'(x_0) = 0$

$x_0 \in (a, b)$

$$y = f(x) = x^3 \qquad f'(x_0 = 0) = 0$$



La funzione y=f(x) è crescente

Funzioni costanti

Un'altra conseguenza dei teoremi precedenti è che se una funzione è derivabile in un intervallo e ha derivata nulla su tutto l'intervallo, allora la funzione è costante:

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in (a,b) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = k$$

Questa proprietà era già stata vista nella sezione dedicata alla derivazione delle funzioni elementari

Funzioni costanti

Notiamo anche che:

Se due funzioni derivabili hanno derivate uguali, allora differiscono per una costante:

$$f'(x) = g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = k$$

Questa proprietà discende dal fatto che la funzione f(x)-g(x) ha derivata nulla e quindi è costante.

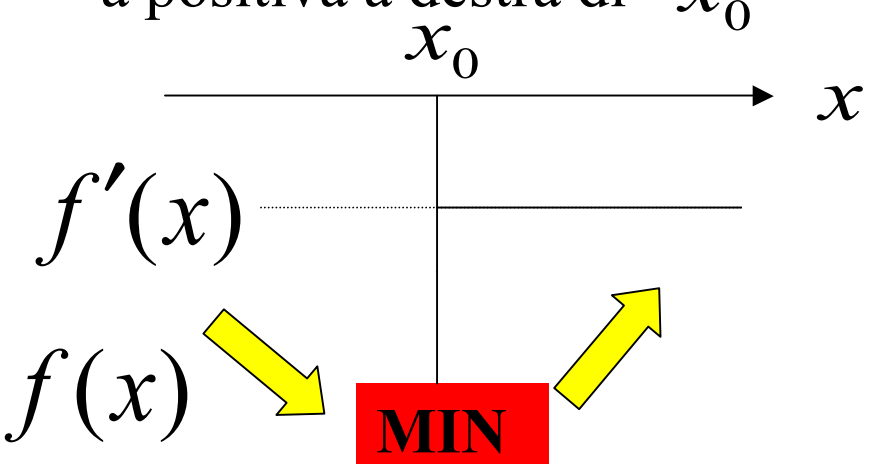
Ricerca dei massimi e minimi

Dalle conseguenze del teorema di Lagrange abbiamo che:

<u>Se</u> la funzione $y = f(x)$ è derivabile nell'intervallo $I = (a,b)$ ed ha **<u>derivata nulla</u>** in $x_0 \in (a,b)$ cioè: $f'(x_0) = 0$

Allora possono verificarsi i seguenti casi:

1) la derivata si annulla in x_0 passando da negativa a sinistra di x_0 a positiva a destra di x_0

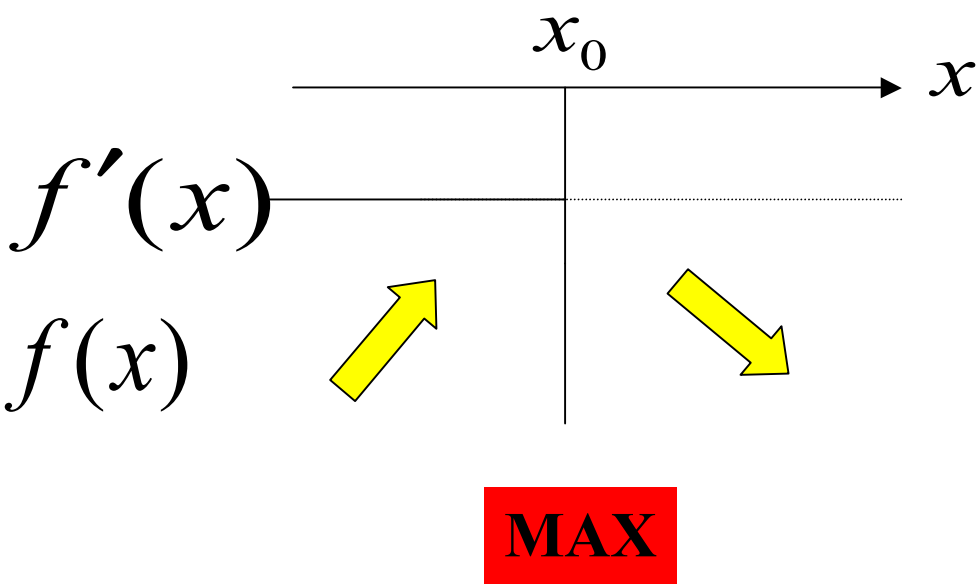


Quindi la funzione passa da decrescente a sinistra di x_0 a crescente a destra di x_0

In questo caso, si dice che $x = x_0$ è un punto di **<u>MINIMO</u>** rel.

Ricerca dei massimi e minimi

2) la derivata si annulla in x_0 passando da positiva a sinistra di x_0 a negativa a destra di x_0

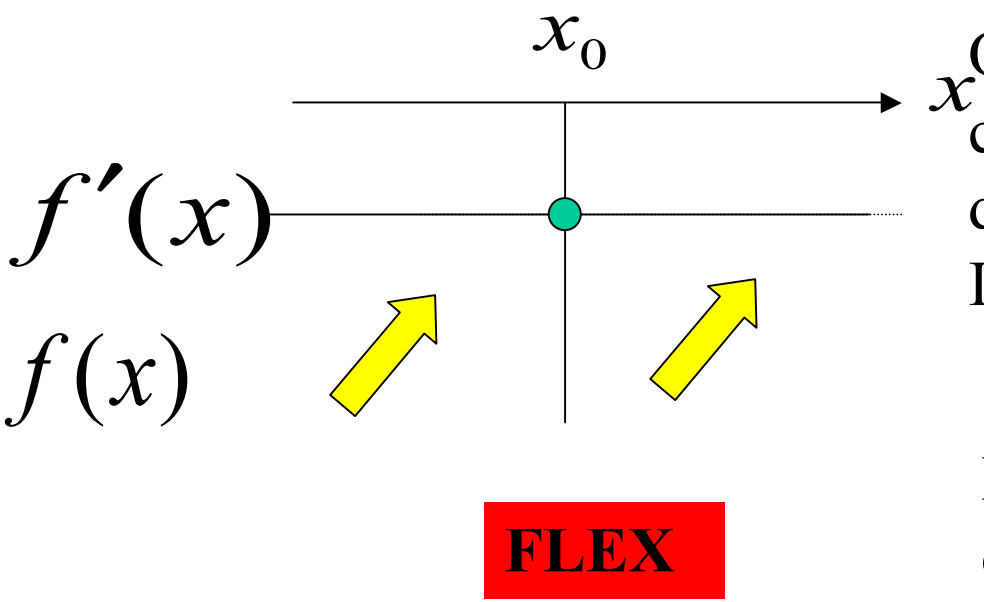


Quindi la funzione passa da crescente a sinistra di x_0 a decrescente a destra di x_0

In questo caso, si dice che $x = x_0$ è un punto di **<u>MASSIMO</u>** rel.

Ricerca dei massimi e minimi

3) la derivata si annulla in x_0 , ma sia a destra che a sinistra di x_0 ha sempre lo stesso segno (positivo o negativo)



Quindi la funzione rimane crescente sia a sinistra che a destra di x_0

In questo caso, si dice che $x = x_0$ è un punto di **FLESSO**.

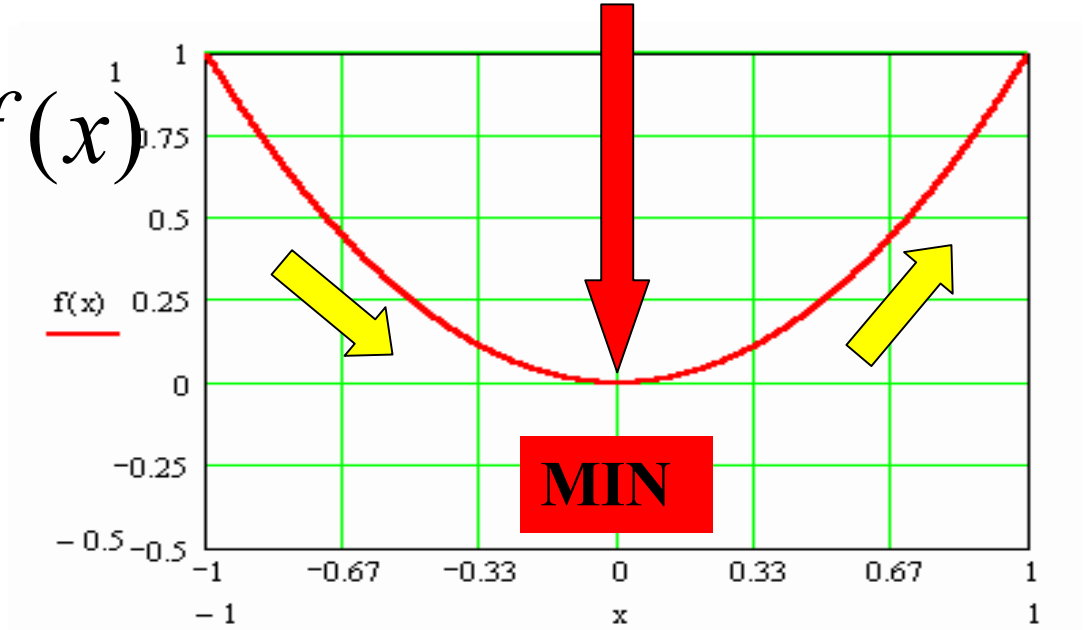
Lo stesso vale se la funzione ha derivata negativa a destra e a sinistra di x_0

massimi e minimi

Caso 1

$$f'(x_0) = 0$$

$$y = f(x)$$



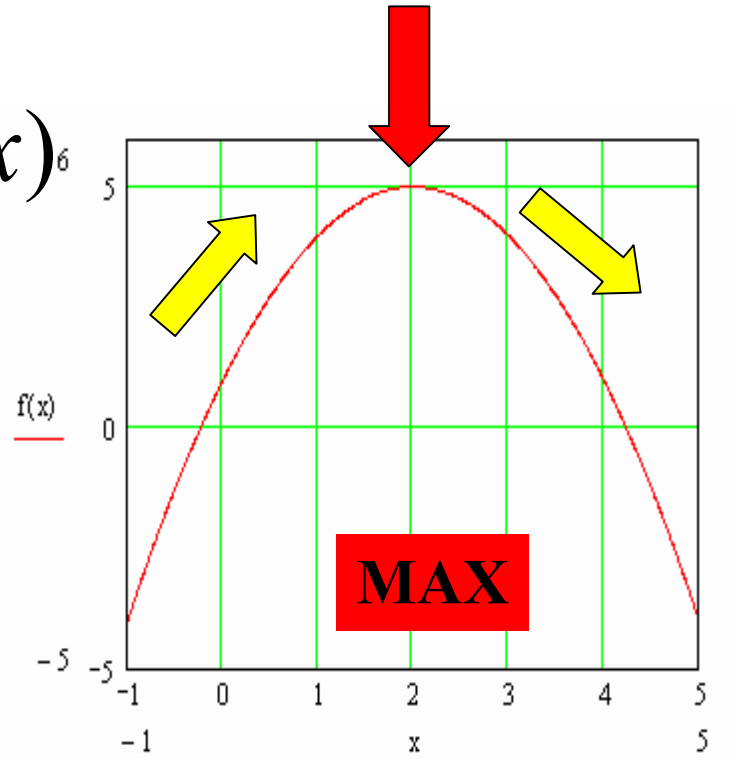
La funzione ha un <u>minimo relativo</u> nel punto $x = x_0$

massimi e minimi

Caso 2

$$f'(x_0) = 0$$

$$y = f(x)$$

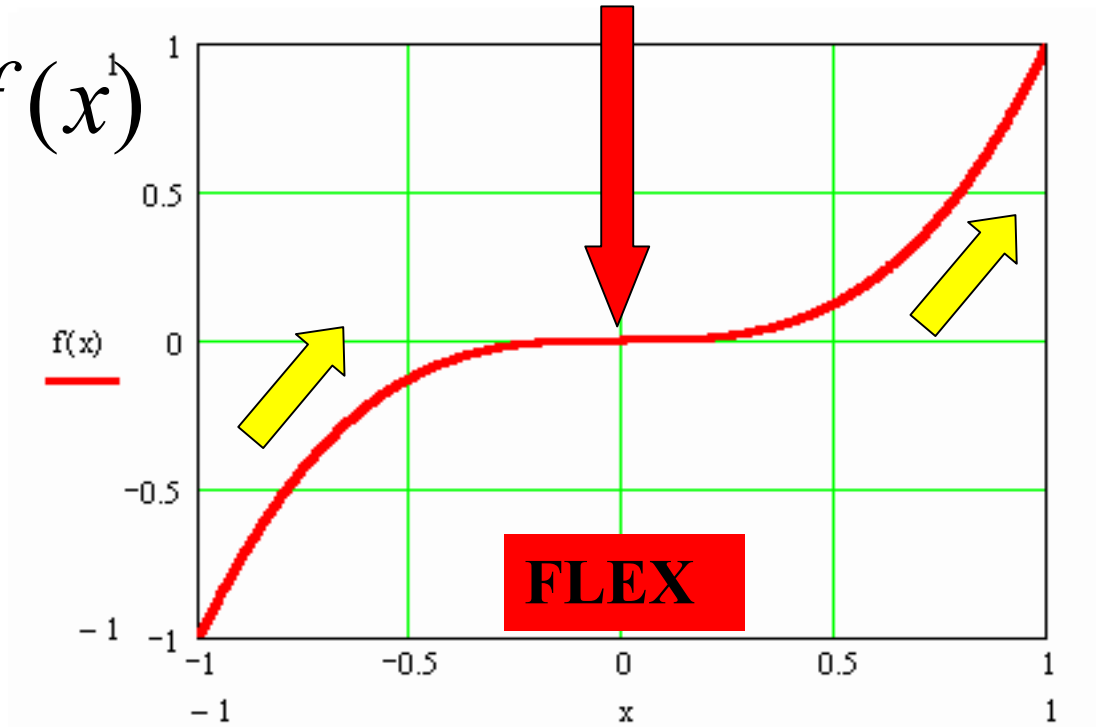


La funzione ha un <u>massimo relativo</u> nel punto $x = x_0$

Flessi

Caso 3 $$f'(x_0) = 0$$

$$y = f(x)$$

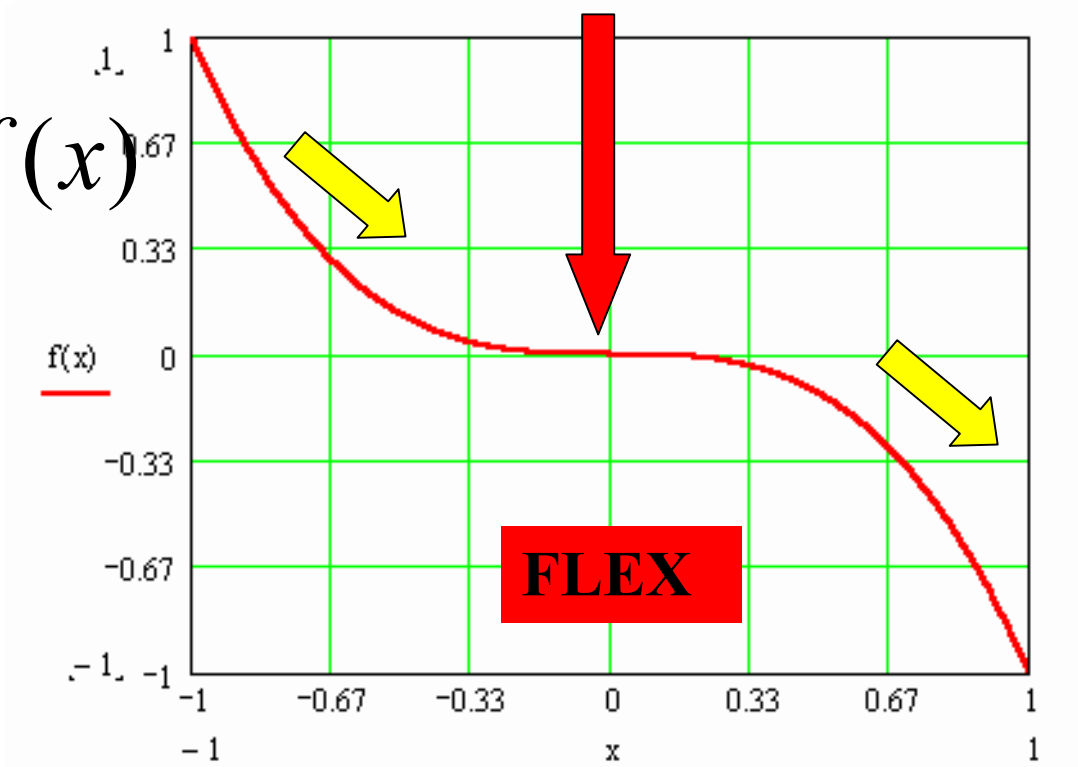


La funzione ha un <u>flesso</u> nel punto $x = x_0$

Flessi

Caso 3 $$f'(x_0) = 0$$

$$y = f(x)$$



La funzione ha un <u>flesso</u> nel punto $x = x_0$

Esempio

Determinate i massimi ed i minimi della funzione seguente:

$$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

SOLUZIONE

La funzione è analitica intera razionale di terzo grado. Quindi è continua e derivabile in tutto l'asse reale.

La presenza di max. min. quindi si può individuare dallo studio del segno della derivata prima:

$$f'(x) = D[x^3 - 2x^2 + 1] = 3x^2 - 4x$$

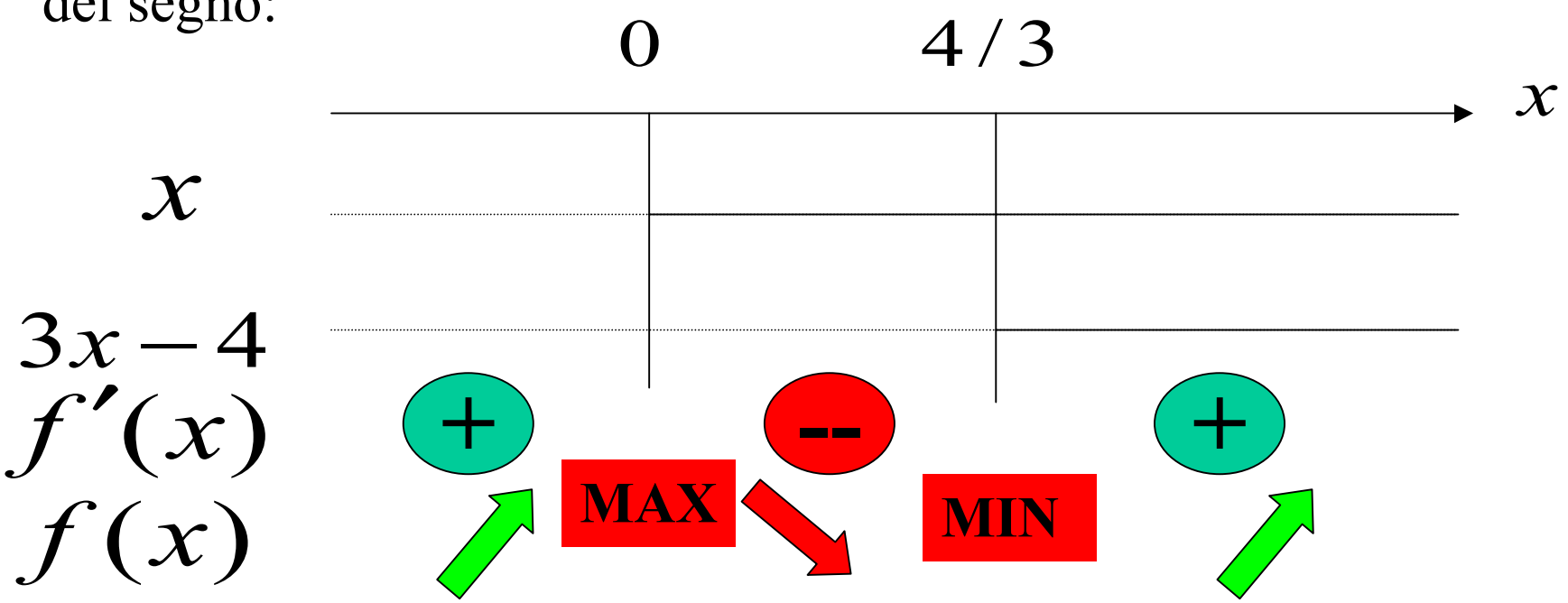
Dobbiamo quindi risolvere la seguente disequazione:

$$3x^2 - 4x \geq 0$$

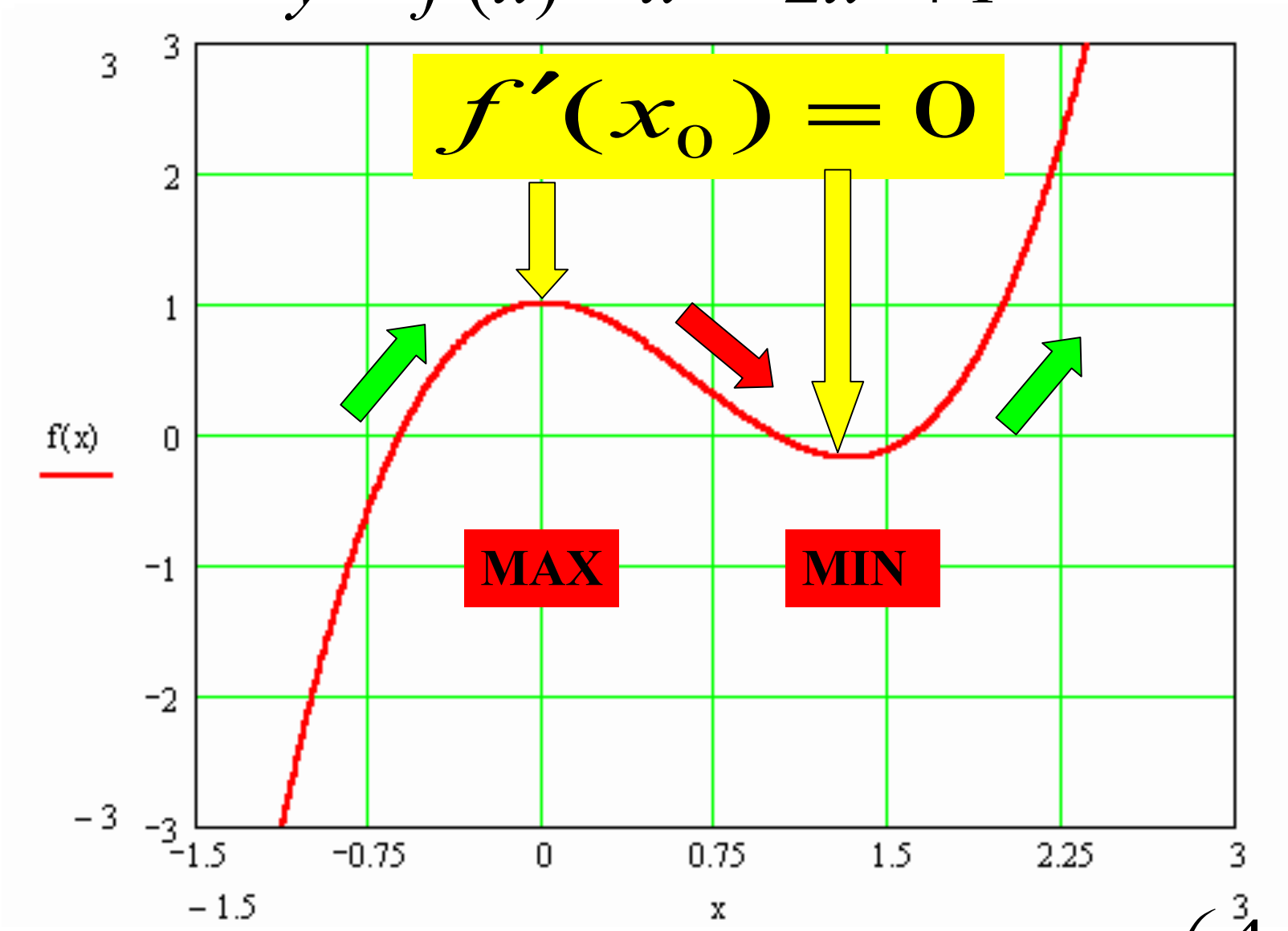
Si può fattorizzare il termine a sinistra come:

$$x(3x - 4) \geq 0$$

Otteniamo quindi due fattori di primo grado. Costruiamo la tabella del segno:



$$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$



Quindi la funzione ha max. in $M(0;1)$ e min. in $m\left(\frac{4}{3};-\frac{5}{27}\right)$

Esercizi proposti

1) Determinate i punti di massimo e minimo relativi della funzione:

$$y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$$ (Ris.: min(1;3))

2) Determinate per quali valori della x la seguente funzione è crescente:

$$y = f(x) = \ln(x) - \frac{x^2}{2}$$ (Ris.: $0 < x < 1$)

3) Verificate che la funzione $y = f(x) = x - \mathrm{sen}(x) \cdot \cos(x)$ è crescente per ogni valore di x.